SMATIN D'HIVER

“Meilleur quotidien biannuel de l’AESMUL, le #3 va vous couper le souffle”

PALME D'OR
FESTIVAL DE CANNES

“Help, I am locked into a basement and he is coercing me to write this”

OFFICIAL SELECTION
SUNDANCE
FILM FESTIVAL

Message ~~de l'éditeur~~ du père Noël:

ρ ρ ρ!

Joyeux Noël, mes p'tits mathématiciens!

Pour votre Noël, je vous souhaite beaucoup de plaisirs entre amis, de la chaleur et surtout, des exercices triviaux à vos examens! N'oubliez pas d'être sage pendant les dernières semaines de 2018, sinon vous allez recevoir une tarte au charbon dans vos bas.

Pis des charbons encore chauds en plus. Je vous jure, on fait un gros feu de joie les ti-lutins pis moi le 23 au soir. Ti-Jacques est tombé dans le feu l'autre jour, y'a perdu l'usage d'une de ses mains. Si votre jouet est mal faite, pensez au pauvre Ti-Jacques.

Tout le monde pensait que c'était Ti-Paul qui l'avait poussé, mais la tite-enquête de la tite-police n'a jamais trouvée de preuves suffisantes. Depuis que Ti-Jacques a couché avec Tite-Pauline, la femme à Ti-Paul, les deux n'ont pas arrêté de se chamailler.

Ce n'est pas de sa faute non plus, pauvre Tite-Pauline. L'alcoolisme de Ti-Paul a fait surface depuis qu'on a dû le mettre dehors y'a 3 ans.

En tout cas je vous épargne les détails sociopolitiques de la vie des lutins, mais la crise économique de 2008 a frappé fort.

Sur ce, je dois vous quitter, j'ai des cadeaux à emballer! Je vous laisse certaines des meilleurs œuvres de littératures dans ma collection.

Si vous avez quelques questions, contactez-moi au H0H 0H0.

Cordialement,

Papa Noël.

(Not) Whole New Dimensions

Philippe-André Luneau

***Abstract*— Il est très intuitif de dire que l'on vit dans un monde à 3 dimensions. Mais qu'est-ce que cela veut réellement dire? Arrêtons-nous quelques instants pour réfléchir à ce que sont les dimensions.**

I. Dimension d'un espace vectoriel

On pourrait associer notre réalité à l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et dire qu'il est de dimension 3 car il faut 3 "directions" (aussi appellées "vecteurs" par les intimes) indépendantes pour décrire correctement tous les objets. C'est le concept de dimension d'un espace vectoriel, la plus répandue et ma foi la plus intuitive. Pour les objets de notre quotidien, il est vrai que cela décrit assez bien la réalité.

II. Contenu d'une boule de dimension D

Avant toute chose, examinons l'équation du "contenu" d'une boule. Par "contenu", on veut dire la "mesure de l'intérieur" de la boule (la longueur en dimension 1, l'aire en dimension 2, le volume en dimension 3, etc.) Pour la dimension 1, le contenu (longueur) de la boule de rayon r (segment de droite) est $\mathrm{L}(B_r) = 2r$. En dimension 2, le contenu (aire) de la boule de rayon r (cercle) est $\mathrm{A}(B_r) = \pi r^2$. Pour la dimension 3, le contenu (volume) de la boule de rayon r (sphère) est $\mathrm{V}(B_r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. On voit donc que le contenu d'une boule de dimension D est proportionnel à r^D. Par souci de simplification, on va dire que la formule du contenu d'une boule de dimension D est $p_D r^D$, où p_D est la constante de proportionalité pour la dimension D.

III. Dimension de Hausdorff

Considérons une vision différente du concept de dimension. Plaçons nous dans le plan $\mathbb{R}^2$ pour visualiser la situation. Prenons un sous-ensemble borné S de $\mathbb{R}^2$ avec une aire non nulle (ex.: un carré "plein" de côté $c > 0$). On pourrait majorer l'aire $\mathrm{A}(S)$ de S en le recouvrant de $n < \infty$ cercles C_i de rayons r_i, qui doivent contenir au moins un point de S chacun, et tous les points de S doivent être inclus dans au moins un cercle. On connaît aussi l'équation de l'aire d'un cercle (contenu d'une boule dans $D = 2$), soit $\mathrm{A}(C_i) = p_2 r_i^2$. En équation, on aurait

$$\mathrm{A}(S) \leq \sum_i p_2 r_i^2 \tag{1}$$

Jusqu'à présent, notre approximation n'est pas très précise, car on n'a aucune contrainte sur le nombre de cercle ou sur le rayon de chaque cercle. Intuitivement, on voudrait avoir beaucoup de petits cercles pour être sûr de combler tout l'espace dans S, sans dépasser. On va donc imposer un rayon maximal $R > 0$ tel que $\forall i, r_i < R$, qui nous permet de garder les cercles petits. Par la suite, on veut s'assurer de ne pas trop dépasser. Les recouvrements à l'aide de cercles ne sont évidemment pas uniques pour S: dépendamment du choix des rayons des Ci, l'aire pourra varier. Puisque notre recouvrement est "par excès" (on dépasse, on a donc une surestimation de l'aire de S), on choisira la plus petite valeur d'aire (infimum):

$$\mathrm{A}(S) \leq \inf_{r_i < R} \sum_i p_2 r_i^2 \tag{2}$$

On va maintenant s'assurer d'avoir des cercles bien petits en passant à la limite:

$$\mathrm{A}(S) = p_2 \lim_{R \to 0} \inf_{r_i < R} \sum_i r_i^2 < \infty \tag{3}$$

Puisque S est borné et d'aire non-nulle, son aire sera finie et non nulle. Cependant, si dans l'équation (3) on remplaçait la puissance 2 par une puissance $\alpha > 2$, les r_i (qui sont très petits) élevés à une puissance trop élevée seraient réduits à 0, et $\mathrm{A}(S) = 0$. Par un raisonnement similaire, prendre une puissance plus petite ferait exploser les r_i et $\mathrm{A}(S) = \infty$. On a donc une valeur $D = 2$ qui fait en sorte que l'aire de S est finie et non nulle. Cette unique valeur D correspond à la dimension de Hausdorff. Par souci de généralisation, tiront les conclusions suivantes: la **dimension de Hausdorff** D de S est telle que

$$0 < \mathrm{M}_D(S) = \lim_{R \to 0} \inf_{r_i < R} \sum_i p_D r_i^D < \infty \tag{4}$$

Appelons $M_D(S)$ la **mesure de Hausdorff** de S en dimension D, qui quantifie le "contenu" de S en dimension D. C'est donc une généralisation de la longueur, de l'aire, du volume, etc.

On observe rapidement que la dimension de Hausdorff coincide avec la dimension que l'on connaît pour les objets "standards" dans $\mathbb{R}^D$ (la dimension de Hausdorff d'une sphère est 3, la dimension de Hausdorff d'un segment de droite est 1, la dimension de Hausdorff d'un carré "plein" est 2, etc.)

IV. "À quoi ça mène tout ça?", ou motivation tardive

Cette notion généralisée de dimension est pratique car *a priori*, nous ne sommes pas restreint à utiliser des dimensions de valeurs entières! Le concept de dimension de Hausdorff n'est pas lié au nombre de vecteurs indépendants dans la base d'un espace vectoriel.

Pourquoi c'est utile? Certains objets, en particulier les figures fractales, ont de mystérieuses propriétés. Si on traduit en français la définition de dimension de Hausdorff, c'est comme si on disait "un objet S_2 de dimension 2 a une aire $\mathrm{A}(S_2) = M_2(S_2)$ finie" ou "un objet S_3 de dimension 3 a un volume $\mathrm{V}(S_3) = M_3(S_3)$ fini". La dimension est donc relié au "contenu" ou à "l'espace occupé" par l'objet plutôt qu'au nombre de "directions" requises pour décrire l'objet. Si on avait un objet comme une courbe C faite de lignes brisées, qui serait typiquement de dimension 1 (donc qui aurait une longueur finie qu'on pourrait approximer par des boules de dimension 1), mais qui serait tellement accidentée peu importe l'échelle à laquelle on l'agrandit, que sa longueur serait toujours plus grande à chaque "zoom". On aurait que $\mathrm{L}(C) = M_1(C) = \infty$ (on dit que C est une courbe non rectifiable, pour les amateurs de calcul vectoriel), et donc la dimension de C devrait être supérieure à 1 mais inférieure à 2 pour que la mesure de Hausdorff soit fini et non nulle ! C'est l'exemple typique de figure fractale: une figure qui est "normalement" dans une dimension D, mais qui est tellement "dense" qu'elle semble aussi être dans la dimension supérieure, comme la courbe C qui devrait avoir une longueur, mais qui est tellement "dense" qu'elle semble recouvrir une partie du plan et avoir une aire.

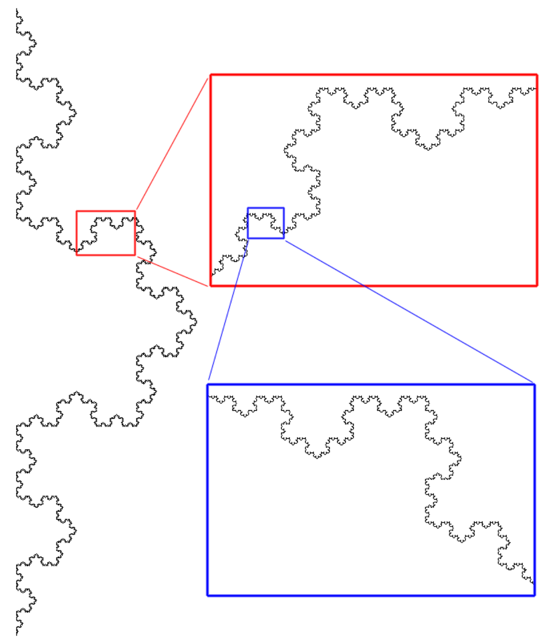
V. Fractales dans la nature

L'étude des fractales et des dimensions non entières peut sembler relever du monde de l'abstrait car on a l'impression que de telles figures, qui sont tellement "déformées" qu'elles ont une longueur ou une aire infinie, ne peuvent pas exister. Cependant, c'est le contraire. Prenons par exemple une bille en verre, comme celles avec lesquelles nous nous amusions au primaire. À l'échelle humaine, la surface semble être lisse, on pourrait même la modéliser comme étant une sphère parfaite. Par contre, si on prend un microscope, on va apercevoir que la surface comporte des aspérités invisibles à l'oeil nu. Si on prend un super-microscope, on va voir que ces imperfections comportent elles-mêmes des difformités encore plus fines. Si on tentait de mesurer successivement la circonférence de notre bille, avec une ficelle, un fil à pêche, un cheveu, un cheveu coupé en 4, un filament de polymère, etc., la quantité que l'on mesure augmenterait toujours car notre instrument de mesure pourrait de mieux en mieux épouser la forme et les imperfections de l'objet, et la longueur semblera tendre vers l'infini au fur et à mesure que la précision de l'instrument augmente. La circonférence de la bille, qui normalement est une courbe de dimension 1, pourrait devenir une fractale de dimension entre 1 et 2. D'autres objets naturels notoirs peuvent être modéliser par des fractales, comme la côte de l'Angleterre (par le même processus que pour la bille), la répartition des galaxies, la répartition des cratères lunaires, les turbulences dans les fluides, etc.

VI. Conclusion

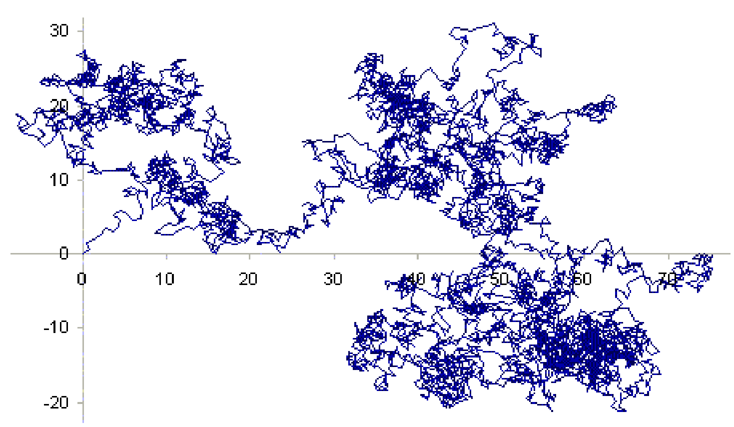
La dimension de Hausdorff d'un objet est déterminée par le "contenu" ou mesure de Hausdorff de l'objet: si une courbe (normalement de dimension 1, donc elle devrait avoir une longueur finie, $0 < M_1 < \infty$) est tellement "cahoteuse" à toutes les échelles qu'elle semble avoir une aire (et donc qu'elle a une longueur infinie, $M_1 = \infty$), sa dimension se situerait entre 1 et 2 (pas forcément un entier)! Le sujet des fractales n'a été qu'éffleuré dans cet article, il y a tellement de choses à dire à propos du calcul pratico-pratique de la dimension d'une fractale, d'homothétie interne, de self-similarité, de chaos et du rôle du hasard qu'il faudrait un article entier pour couvrir le sujet. En attendant, je vous invite à consulter des livres ou fouiller sur le web si vous avez d'autres interrogations sur le sujet!

VII. Figures



Ci-dessus: Cette courbe est appellée *flocon de von Koch*. On voit que peu importe l'échelle, la courbe est toujours aussi raboteuse, donc elle n'est pas rectifiable (sa longueur est infinie). La dimension de cette courbe est $D \approx 1.26 > 1$.

Ci-dessous: Voici une trajectoire du mouvement brownien dans le plan, c'est-à-dire un mouvement aléatoire, équiprobable dans toutes les directions. Étonnament (mais en même temps, pas tant que ça), la dimension fractale de cette courbe est $D = 2$. Même s'il est inconcevable qu'une courbe ait une aire, elle tend effectivement à recouvrir tout le plan au fil du temps.



Classement des lettres grecques minuscules

Gentil rappel que si vous êtes en désaccord, vous êtes probablement un phénicien. Pas toutes les lettres ont une description, pour ne pas faire trop long.

1 Trash Tier

Gamma γ **Upsilon** υ,

Omikron o . Omikron est au lettre grecque ce que le yahtzee est au sport extrême. La lettre est tellement plate qu'il n'existe même pas de commande LaTeX pour, les Interwebs disent juste de mettre un o italique.

Xi ξ. Ugh. Pas cette lettre là. Mon cousin de 2 ans aurait pu faire une meilleure lettre, ton cousin de 2 ans aurait pu faire une meilleure lettre, le cousin de 2 ans de TOUT LE MONDE aurait p faire une meilleure lettre. Xi est un monument à l'arrogance de l'homme. Les légendes disent que la boite de Pandore ne contenait qu'une seule chose, l'hybris des hommes, symbolisées par un seul gribouillis, xi. Au moins Samekh était beau.

2 Low Tier

Rho ρ, **Kappa** κ, **Zeta** ζ, **Theta** θ,

Pi π. Soyons vrai un instant. Qui aime vraiment pi? Quel imbécile c'est rendu compte que le ratio entre la circonférence d'un cercle et son rayon était $A = Cxr$ et s'est dit "Je vais définir une constante universelle qui va être $\frac{C}{2}$"? Ensuite, lorsque on s'est rendu compte qu'un tour, c'était 2π radians, quand l'humanité avait une chance de se reprendre. Qui s'est dit "C'est ok, aucun problème ici". Le système avec τ qui est un tour est tellement plus intuitif, les mathématiques sont sadomasochistes de garder le statu quo que représente π.

3 Mid Tier

Tau τ, **Alpha** α, **Beta** β, **Eta** η, **Delta** δ.

4 Top tier

Epsilon ϵ, **Omega** ω, **Sigma** σ, **Nu** ν, **Chi** χ.

5 God tier

Psi ϕ, **Phi** ϕ, **Lambda** λ.

Iota ι. Selon Wikipédia, Le minimalisme (ou art minimal) est un courant de l'art contemporain, apparu au début des années 1960 aux États-Unis, en réaction au lyrisme pictural de l'Expressionnisme abstrait et en opposition à la tendance figurative et ironique du Pop Art. Le Minimalisme est l'héritier du Modernisme, et plus particulièrement du Bauhaus. Il fait sienne la maxime d'un des grands représentants du Bauhaus, Mies Van der Rohe : "less is more ". Ainsi, les grecs, en inventant iota, ont été avant-gardistes en étant minimalistes. Une œuvre d'art!

Mu μ. On dirait un u qui pleure. La lettre mu m'imprègne d'une profonde nostalgie. Lors des longues journées pluvieuses, mon regard errer vers l'extérieur et ma pensée déambule lentement vers la lettre mu. Si vous n'appréciez pas la profondeur de mu, vous pouvez retourner à Byblos, les phéniciens.

Convergence faible et faible étoilée: une visite par l'exemple

Pierre-Olivier

5 décembre 2018

1 Introduction

Deux « dudes » qui se parlent dans le local d'asso.

— Hey « dude », la suite de nombres complexes que j'aie, sais-tu ce que j'ai montré à propos d'elle ?
— Non « dude », montres-moi de quoi elle a l'air, ta suite.
— Ben, c'est genre une suite qui converge faiblement-$*$ vers 0.
— Heu... Faiblement quoi ? ! ?
— Faiblement-$*$. C'est un concept que je viens de voir en genre Analyse I, version 2.0.
— Tah, moi qui est un deuxième année, je n'avais pas vu cela dans mon cours d'Analyse I...
— Ben, si tu veux et si tu as du temps, je peux t'expliquer !
— Pas de « prob ». J'ai en masse le temps. Ma mère est en Saskatchewan et mon père est parti, une bonne fois pour toute, dans le Nord du Nord, si tu vois ce que je veux dire...
— Non pas vraiment, mais l'important, c'est que t'aille le temps !

On peut dire que le premier « dude » qui a ouvert le bal s'est donné une tâche pas très facile : expliquer la convergence faible et faible-$*$ à son ami. Hey, mais en fait, ce « dude », bordel, c'est moi ! ! Et vous, vous êtes mes ami.e.s lecteurs-lectrices. Alors, laissons-nous entreprendre, tranquillement, l'aventure de la compréhension de la convergence faible et faible-$*$. Vous n'y verrez que des étoiles !

2 Quelques définitions s'imposent...

Il faut croire que ce n'est pas tout le monde ou toutes les choses de ce monde qui connaissent l'ensemble des mathématiques. C'est pourquoi que je devrai introduire quelques petites notions, plus précisément, des espaces de suites ! J'espère que vous avez déjà vu cela les suites... Parce qu'au CÉGEP, et bien, nous voyons les séries et ce concept utilise les suites. Malgré tout, ne prenons pas de chance et introduisons-nous dans le monde des suites de nombres complexes !

Une **suite de nombres complexes** indexée par les nombres naturels positifs $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ est une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Nous utilisons bien souvent la notation $x_n := f(n)$ et pour désigner cette suite, nous utilisons la notation $(x_n)_{n\geq 1}$. Lorsque nous dirons le mot « suite », il sera implicique qu'il s'agit d'une suite de nombres complexes. Une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ **converge** vers un nombre complexe x si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon) := N > 0$ tel que $\forall n \geq N$, alors

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

où $|w| := \sqrt{u^2 + y^2}$ est le module du nombre complexe $w = u + \mathbf{i}v$. Si une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre complexe x, alors on note $x_n \to x$ pour indiqué cette convergence. Une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est une **suite de Cauchy** si quelque soit $\varepsilon > 0$, il exists un entier $N(\varepsilon) := N > 0$ tel que $\forall n, m \geq N$, alors

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

L'ensemble des nombres complexe muni du module est un **espace complet**, c'est-à-dire que toutes les suites de Cauchy converge vers un nombre complexe. Plus précisément, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, alors il existe un nombre complex x tel que $x_n \to x$. Pour désigner l'ensemble des toutes les suites de nombres complexes, on utilise la notation suivante $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre complexe. La **série** associée à la suite (x_n) est l'expression formelle (l'égalité veut dire qu'on adoptera l'une des deux notations)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n\geq 1} x_n.$$

Ce qui est intéressant, c'est de discuter de la convergence de ces séries, c'est-à-dire trouver une valeur $S \in \mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\geq 1} x_n = S$. S est alors appelée **la somme** de la série. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. La **n-ième somme partielles** S_n est définie comme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Ainsi, on dit que S est la somme de la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ si et seulement si $S_n \to S$. Autrement dit, on est ramené à étudier la convergence de la suite de nombres complexes $(S_n)_{n\geq 1}$. Nous disons qu'une série $\sum_{n\geq 1} x_n$ **converge absolument** si et seulement si $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ converge. Dans bien des situations, pour signifier qu'une série converge absolument, nous disons que $\sum_{n\geq 1} |x_n| < +\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ converge vers un nombre positif mais qui n'est pas infini. Nous sommes maintenant prêt à introduire les espaces de suites qui nous intéressent.

Le premier espace de suites est l'espace des suites qui convergent vers 0. Il est noté c_0 et est défini comme

$$c_0 := \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,:\, x_n \to 0 \right\}.$$

Le deuxième espace de suites est l'espace des suites ℓ^1. Il est défini comme

$$\ell^1 := \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,:\, \sum_{n\geq 1} |x_n| < +\infty \right\}.$$

Enfin, le troisième espace de suites est l'espace des suites ℓ^∞. Il est défini comme

$$\ell^\infty := \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,:\, \sup_{n\geq 1} |x_n| < +\infty \right\}.$$

Maintenant, il est possible de prendre des suites de suites (« Mind Blowing ! ! ») et définir deux notions de convergence de suites de suites de ℓ^1. Soit $(a^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 (c'est-à-dire que $a^n \in \ell^1$ pour tout $n \geq 1$). On définit les deux types de convergence suivante pour la suite $(a^n)_{n\geq 1}$. [1]

1. Remarquer que j'ai utilisé la notation a^n car a^n est une suite et donc je voudrais écrire cela comme $a^n = (a_k^n)_{k\geq 1}$ pour ne pas mélanger l'indice de la suite $(a^n)_{n\geq 1}$ et l'indice de la suite $(a_k^n)_{k\geq 1} \in \ell^1$.

1. $a^n = (a^n_k)_{n\geq 1}$ **converge faiblement** vers $a = (a_k)_{k\geq 1} \in \ell^1$ si et seulement si pour toute suite $\varphi = (\varphi_k)_{k\geq 1} \in \ell^\infty$, la suite de nombres complexes $(\langle a^n, \varphi\rangle)_{n\geq 1}$ où $\langle a^n, \varphi\rangle := \sum_{k\geq 1} \varphi_k a^n_k$ converge vers le nombre complexe $\langle a, \varphi\rangle := \sum_{k\geq 1} \varphi_k a_k$ (la convergence est celle avec les nombres complexes vue ci-haut).
2. $a^n = (a^n_k)_{n\geq 1}$ **converge faiblement-$*$** vers $a = (a_k)_{k\geq 1} \in \ell^1$ si et seulement si pour toute suite $x = (x_k)_{k\geq 1} \in c_0$, la suite de nombres complexes $(\langle x, a^n\rangle)_{n\geq 1}$ où $\langle x, a^n\rangle := \sum_{k\geq 1} x_k a^n_k$ converge vers le nombre complexe $\langle x, a\rangle := \sum_{k\geq 1} x_k a_k$ (la convergence est celle avec les nombres complexes vue ci-haut).

Okay, mais là, ces définitions, c'est vraiment abstrait. Je sais, je sais. C'est pour cela que j'ai un petit exemple pour illustrer cette notion de convergence.

3 Exemples pour mieux se divertir

Notre premier exemple est la suite $(a^n) \subset \ell^1$ où $a^n = (a^n_k)_{k\geq 1}$ définie par

$$a^n_k := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Notre but est ici de montrer que cette suite converge faiblement et faiblement-$*$ vers $a = 0 = (0, 0, 0, \ldots)$ la suite avec une infinité de zéros.

(1) Convergence faible. Soit $\varphi = (\varphi_k) \in \ell^\infty$. On veut montrer que la suite

$$\langle a^n, \varphi\rangle := \sum_{k\geq 1} a^n_k \varphi_k \to T = \sum_{k\geq 1} \varphi_k a_k = 0.$$

D'après la définition de a^n, pour chaque entier $n \geq 1$, nous avons que

$$|\langle a^n, \varphi\rangle - T| = |\langle a^n, \varphi\rangle| = \frac{|\varphi_n|}{n}.$$

Ainsi, comme $\varphi \in \ell^\infty$, nous avons que $|\varphi_k| \leq \sup_{k\geq 1} |\varphi_k| := C < \infty$, d'où l'inégalité suivante :

$$|\langle a^n, \varphi\rangle| \leq \frac{C}{n}.$$

Comme C est un nombre fini, si $n \to \infty$, $\frac{C}{n} \to 0$. D'après le théorème des deux gendarmes (ou sandwiche), on conclut que $\langle a^n, \varphi\rangle$ converge vers 0. On a gagné puisque φ était choisi arbitrairement.

(2) Convergence faible-$*$. Soit $x = (x_k) \in c_0$. On veut montrer que la suite de nombre

$$\langle x, a^n\rangle := \sum_{k\geq 1} a^n_k x_k \to T = 0.$$

D'après la définition de a^n, pour chaque entier $n \geq 1$, nous trouvons de la même manière que précédemment que

$$|\langle x, a^n\rangle - T| = |\langle x, a^n\rangle| = \frac{|x_n|}{n}.$$

Cependant, comme $\frac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, on trouve que

$$\frac{x_n}{n} \leq x_n.$$

Or, $x \in c_0$ et donc $x_n \to 0$. Par conséquent, par le théorème des deux gendarmes, on a que $\langle x, a^n \rangle \to 0$. On a gagné puisque x était choisi arbitrairement.

Cet exemple converge vers 0 dans les deux types de convergence. Est-ce que c'est toujours le cas ? Autrement dit, se peut-il qu'une suite (a^n) converge faiblement vers a, mais pas faiblement-$*$ ou encore qu'une suite (a^n) converge faiblement-$*$ vers a, mais pas faiblement ? Le prochain exemple répond à la deuxième partie de la question.

Le deuxième exemple que nous considérons le suivant. Soit $(a^n) \subset \ell^1$ où $a^n = (a_k^n)_{k\geq 1}$ est définie comme

$$a_k^n := \begin{cases} 2^{1-n} & \text{si } 2^{n-1} \leq k < 2^n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notre but est de montrer si la suite (a^n) converge en norme et/ou faiblement et/ou faiblement-$*$ vers un élément $a \in \ell^1$.

(1) Convergence faible. Soit $a^n = (a_k^n)_{k\geq 1}$ telle que définie ci-haut. Soit $\varphi \in \ell^\infty$ donnée par

$$\langle a^n, \varphi \rangle = \sum_{k\geq 1} a_k^n \varphi_k.$$

S'il existe une $a \in \ell^1$ telle que $a^n \to a = (a_k)$ faiblement, alors quelque soit $\varphi \in \ell^\infty$ donnée par l'équation ci-haut, on a

$$\sum_{k\geq 1} a_k^n \varphi_k \to \sum_{k\geq 1} a_k \varphi_k \text{ quand } n \to \infty.$$

Soit $\varphi = e^m = (e_k^m)_{k\geq 1}$ la suite appartenant à ℓ^∞ telle que $e_k^m = 1$ si $k = m$ et $e_k^m = 0$ si $k \neq m$. Alors, pour chaque entier $n \geq 1$, nous avons que

$$\sum_{k\geq 1} a_k^n e_k^m = \begin{cases} 2^{1-n} & \text{si } 2^{n-1} \leq m < 2^n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis, on a $\sum_{k\geq 1} a_k e_k^m = a_m$. Donc, lorsque $N \geq 2^n$, nous avons que $\langle a^j, e^m \rangle = 0$ pour tout $j \geq N$. Ainsi, nous obtenons que

$$a_m = \lim_{n\to\infty} \langle a^n, e^m \rangle = \lim_{j\to\infty} \left\langle a^j, e^m \right\rangle = 0.$$

Par conséquent, nous devons avoir que $a_m = 0$ quelque soit $m \geq 1$ un entier. Autrement dit, la limite de (a^n) doit être $a = 0$ (la suite avec seulement des zéros en entrées). Donc, nous devrions avoir

$$\langle a^n, \varphi \rangle \to 0 \tag{$\triangle$}$$

quelque soit $\varphi \in \ell^\infty$. Or, ceci ne se peut pas. En effet, la suite constante $\varphi = (\varphi_k) = (1)_{k\geq 1}$ ne possédant que des 1 en entrées ne satisfait pas la condition (**??**). En effet,

$$\langle a^n, \varphi \rangle = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

quelque soit $n \geq 1$ et donc $\langle a^n, \varphi \rangle$ converge vers 1 lorsque $n \to \infty$. Or, selon la condition (**??**), nous avons que $\langle a^n, \varphi \rangle$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ceci est une contradiction. Donc, (a^n) ne peut pas converger faiblement vers un élément $a \in \ell^1$.

(2) Convergence faible-$*$. Soit $a^n = (a_k^n)_{k\geq 1}$ telle que définie ci-haut. On veut montrer que quelque soit $x \in c_0$, alors $\langle x, a^n \rangle \to 0$. Les fonctionnelles linéaires a^n sont idenfiées par

$$\langle x, a^n \rangle = \sum_{k\geq 1} x_k a_k^n \quad \forall x \in c_0.$$

Ainsi, si $x \in c_0$, alors

$$|\langle x, a^n \rangle| \leq \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{|x_k|}{2^{n-1}} \leq \left(\sup_{2^{n-1}\leq k<2^n} |x_k| \right) \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{2^{n-1}\leq k<2^n} |x_k|.$$

Mais, comme $2^{n-1} \geq n-1$ pour $n-1 \geq 0$, nous avons que

$$\sup_{2^{n-1}\leq k<2^n} |x_k| \leq \sup_{k\geq 2^{n-1}} |x_k| \leq \sup_{k\geq n-1} |x_k|.$$

Comme $x \in c_0$, nous avons que $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n-1} |x_k| = 0$ et donc $\langle x, a^n \rangle \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

7 Idées d'article pour un futur SMATIN
Louis-Philippe Vignault

1-Comment faire une plainte pour harcèlement contre son VP info :

Si vous lisez cet article, probablement que vous êtes-vous même à la recherche d'une idée d'article pour un SMATIN puisque vous sentez la pression grandissante de la part de votre VP info d'écrire pour le SMATIN et vous venez de vous rendre compte que le SMATIN sera aussi publié à la prochaine session. Écrire cet article pourrait vous aider à ne plus avoir à subir toute cette pression pour écrire un article! Wait a minute…

2-Toutes les plaintes à faire pour l'AESMUL:

Tu te demandes pourquoi c'est le même prof qui donne un cours depuis longtemps, mais que cela change à ton année pour un prof que tu n'aimes pas? Tu veux changer certains éléments de la charte (Raph sent toi pas visé)? L'alimentation d'un de tes camarades te purge au plus haut point et tu ne crois pas lui avoir assez dit? As-tu déjà eu une plainte à faire contre le département, mais tu ne sais pas comment être entendu? Un article pour le SMATIN pour te vider le cœur est peut-être ce qu'il te faut!

3-Opinion sur le débat du moment :

LPU, grèves, idées de la CADEUL, sujet de controverses inconnues de tous apporté un jour par quelqu'un de physique qui est venu cogné à l'asso, parlons-en! Si tu penses que les opinions sur spotted ULaval sont bonnes, cette article est le sujet de rêve pour toi!

4-Article Vice

Qu'est-ce qui manque dans le SMATIN? Si ta réponse est « des potins croustillants plus ou moins véridiques sur lesquels je pourrais mettre un titre accrocheur mais trompeur » tu es dans la bonne mentalité pour cette article. Ces articles peuvent inclure « J'ai pris un cours 4000 dans ma première session, vous ne devinerez jamais ce qui s'est passé », « On a envoyé un étudiant en infiltration faire une année au BES » et « Des propos racistes dans un article à propos des sudokus? ».

5-Résumé des projets de recherches dans lesquels je devrais m'inscrire :

Qui n'a jamais été bombardé de demande de participation à des projets de recherches dans ses mails? Puisque tu n'as jamais décidé de les lire ou que tu ne correspondes pas au doux critère de « femme de 37 ans enceinte ayant subi une fracture dans la dernière année et parlant 3 langues dont le suédois », les chances sont que tu en aies skippés plusieurs. Si seulement quelqu'un pouvait faire une liste des meilleurs recherche auxquels on pourrait participer… Oh well!

6-Débouché de bac en math

Il peut toujours être intéressant de se demander ce que l'on peut faire dans son champ d'étude, soit pour avoir plus d'idées de choix de carrières ou pour impressionner la 100e personne qui vous demande « Mais heum… après es-tu genre comptable? ». Si tu trouves ça trop facile, je te propose le défi suivant : pas le droit de mentionner les mots informatiques, enseignement ou statistiques.

7-7 meilleurs idées

Pourquoi seulement 7 idées te dis-tu? Pourquoi pas 10? Essaie, et tu sauras pourquoi cela est difficile et le temps qu'on passe toutes ces fabuleuses idées, nous aurons besoin de quelqu'un pour nous illuminer sur de nouvelles idées d'articles à écrire et contraindre les gens à rédiger pour le prochain SMATIN!

Donc pour le prochain SMATIN, plus d'excuse du genre « mais je sais pas quoi écrire » et bonne rédaction ;)

~~JEUX~~

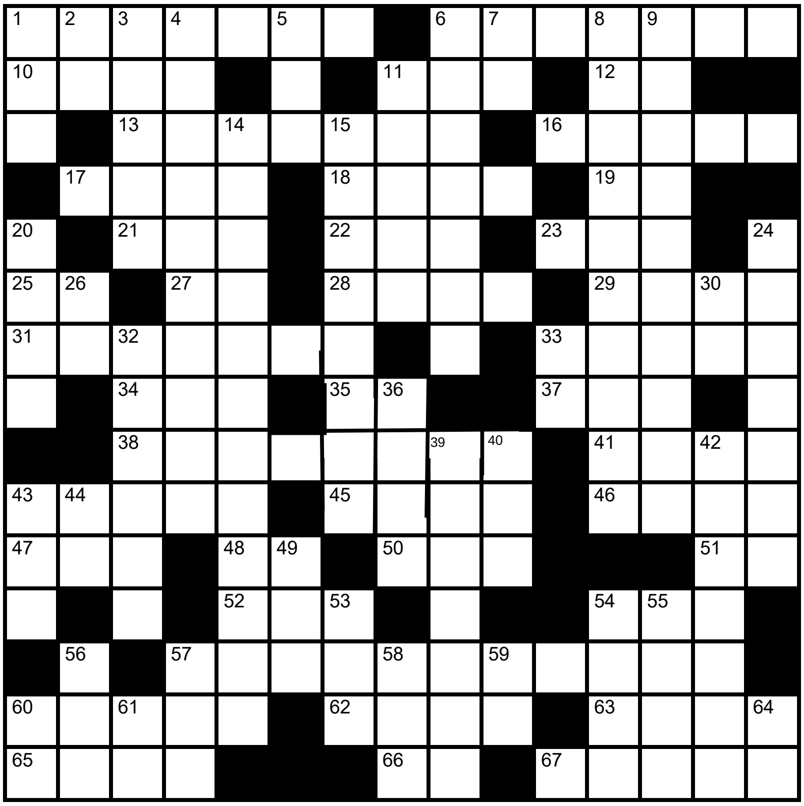
1) À Noël, Lucas reçoit une tasse avec l'illustration ci-dessous. Il se demande s'il peut rejoindre chaque maison à chaque service, sans jamais que des tuyaux ne se croisent. Peux-t-il le faire?

2) Si le père Noël commence au point (0,0) et fait des bonds. Le premier est un bond d'une distance de 1, ensuite 2, 4, 8 etc. Peut-il revenir au point (0,0)?

3) Le père Noël reçoit une demande bien spéciale. Un petit garçon lui demande si l'ensemble S est dénombrable ou non. Pour créer S, on prend l'ensemble [0,1] et nous coupons le tiers du milieu. Nous avons donc l'ensemble [0,$\frac{1}{3}$] et [$\frac{2}{3}$, 1]. Nous découpons ces deux lignes en 3 et enlevons encore les tiers du milieu. Alors, nous avons 4 ensembles, [0,1/9], [2/9, 3/9], [6/9/,7/9] et [8/9, 1]. En faisait un nombre infini d'étapes, nous obtenons l'ensemble S.

4) Soit deux réels pris au hasard. Prenons un troisième réel. Quelle est la probabilité qu'il soit entre les deux premiers? Refaisons la même expérience, mais différemment. Maintenant, prenons 3 réels au hasard, et décidons lequel est notre troisième. Quelle est la probabilité qu'il soit entre les deux autres? Est-elle la même probabilité? Pourquoi?

5) Complétez le mot croisé suivant:



Across

1 Père du calcul infinitésimal (7)

6 Complétion des rationnels différente des réels (7)

10 Opposé (4)

11 Groupe ___fini (3)

12 Lettre grecque (2)

13 Qui se fait assister (7)

16 Même chose que le 43 (5)

17 Pour dire de s'en aller (4)

18 Se dit de ce qu'à fait au vent quelqu'un qui récolte la tempête (4)

19 Conjonction (2)

21 Nom d'Antoine Smash (3)

22 "Non-Resident Indian" (3)

23 Un anglophone pourrait mélanger ceci et un corps (3)

Down

1 Fatigué (3)

2 Dans (2)

3 Aucun sens (5)

4 Algorithme très utile (10)

5 L'endroit où nous sommes (3)

6 Nombre qui ne se divise que par 1 et lui-même (7)

7 Voyelles (2)

8 Matrice dont le déterminant est non-nul (10)

9 Groupe non-commutatif (10)

11 Préfixe pour les meilleurs dinosaures (5)

14 Matrice qui a fait le malheur de bien des étudiants du cours d'Antonio (12)

15 Plusieurs jumelles (8)

20 Un citoyen très connu et apprécié (4)

24 Pas un expert (7)

25 Tout les membres de l'AESMUL devrait y aller (2)

27 Jumelles (2)

28 Fête Chrétienne (4)

29 Service régional d'admission du Montréal métropolitain (4)

31 Mère de la théorie des anneaux (7)

33 Prénom (5)

34 Chanteuse (3)

35 Dieu égyptien (2)

37 Wan (3)

38 La dérivé de la vitesse (8)

41 Se dit de quelqu'un qui utilise sans acheter (4)

43 Même chose que le 16 (5)

45 Livre (4)

46 "European Network for the Promotion of Language Learning Among all Undergraduates" (4)

47 Je n'y vois pas la pertinence (3)

48 Infinitif (2)

50 Un millénial pourrait utiliser ce mot pour dire que quelque chose est amusant (3)

51 La rune Younger Futhark (2)

52 Conjonction de Subordination (3)

54 Si votre preuve en traite, il y en a surement une meilleure (3)

57 Ce que vous ferez demander si vous publiez dans le prestigieux SMATIN (11)

60 La taille d'un groupe (5)

62 Groupe de nu metal, à l'envers (4)

63 Dieu grec (4)

65 Régime d'épargne-retraite (4)

66 Dans (2)

67 Test de Weierstrass (5)

26 Jeu asiatique de stratégie (2)

30 Après l'an 0 (2)

32 Un ensemble avec structure (6)

33 "and behold" (2)

36 Une sauce à l'ail, sauf un ingrédient (4)

39 Le Yathzee des sports extrêmes (7)

40 Propre (3)

42 Héro Grec (7)

43 Début d'alphabet (3)

44 Conjugaison d'aller (2)

49 Saison d'accouplement (3)

53 Période très longue (3)

54 Animal domestique (4)

55 Coupé (4)

56 Période longue, mais moins que 53 (3)

57 Son de pirate (3)

58 Ce qu'on demande 4 Shrek au début du 4 (3)

59 Kalashkinov (2)

60 Conjonction (2)

61 Préposition (2)

64 Qui est canonisé (2)